Sorbonne Université **Analyse numérique (LU3MA232)**
Licence de mathématiques 2025–2026

Interrogation du 16 Decembre 2025

Durée : 45 minutes

Consignes: On cherche ici à s'assurer que le cours est compris. Il faut donc impérativement justifier vos résultats par une démonstration à partir des éléments dont vous disposez (énoncé, définitions, propriétés, raisonnements et calculs explicites) : **Barème indicatif:** 23 points.

Questions de cours: (4.5 points) — 5 min.

- Rappeler les expressions des polynomes de Lagrange associés aux points $(y_i)_{i=1,\dots,n}$.
- Déterminer les poids optimaux de la méthode de quadrature aux points $(y_i)_{i=1,\dots,n}$.
- En déduire la méthode de Simpson sur $[0, 1]$.

Exercice 1 (10 points) : Construction d'une formule d'intégration — 18 min. On cherche à approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ par une formule du type :

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \approx \alpha g(-1) + \beta g''(0) + \gamma g(1) := \sigma(g),$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sont des coefficients à déterminer et g une fonction suffisamment régulière.

1. Construire la formule d'intégration et en déduire le degré de précision ou l'ordre de la méthode.
2. Donner l'erreur d'intégration associée, i.e. trouver les valeurs exactes de C_1 et k tel que
$$|E(g)| \leq C_1 \sup_{t\in[-1,1]} |g^{(k)}(t)|.$$
Indication. On pourra faire le développement de Taylor de $g(t)$, $g(-1)$ et $g(1)$ au point 0 en precisant la regularité sur la fonction g.
3. Considérons une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq M}$ d'un segment $[a, b]$ non reduit à un point. Ecrire la formule de la méthode de quadrature composée associée à la methode de quadrature élémentaire σ et à la subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq M}$ pour approcher
$$J(f) = \int_a^b f(x)\,dx,$$
4. Donner l'erreur locale sur un sous-intervalle et deduire l'ordre de l'erreur globale sur $[a, b]$ en fonction du pas ou taille h de la subdivision i.e. trouver les valeurs exactes de C_2, k et m tel que
$$|E_h(f)| \leq C_2 \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(k)}(x)\right| h^m.$$

Exercice 2 (5.5 points) : Schémas d'ordre élevé — 12 min. On s'intéresse à la discrétisation d'une équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$, avec $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière. Soit α un paramètre non nul positif, $\alpha > 0$. Définissons les deux abscisses de quadrature :

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha\sqrt{3}}\right), \qquad c_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right),$$

telles que $c_1 > c_2$ pour $\alpha > 0$ et considérons le tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & c_1 & 0 \\ c_2 & 2c_2 - 1 & 1 - c_2 \\ \hline & \dfrac{\alpha^2}{1+\alpha^2} & \dfrac{1}{1+\alpha^2} \end{array}$$

1. Écrire le schéma correspondant, indiquer s'il est explicite ou implicite,
2. Donner, en fonction de la constante de Lipschitz uniforme L de f, un domaine de pas h pour lequel le schéma est bien défini.
3. Verifier que cette methode semi-implicite est d'ordre 3.

Exercice 3 (3 points)-Optionnel: Stabilité et Consistance d'un schema— 10 min. Soit $T > 0$. Considérons une fonction $f \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|,$$

pour un nombre $K \geq 0$. Étant donnée une condition initiale $y^0 \in \mathbb{R}$, nous nous intéressons à la résolution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], \quad y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

Étant donnés des nombres $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ et un entier $N \geq 1$, nous considérons la méthode numérique définie via le schéma

$$y_0 = y^0, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N-1,$$

$$y_{n+1} = y_n + h\Big(\alpha f(t_n, y_n) + \beta f\Big(t_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\Big) + \gamma f(t_{n+1},\ y_n + hf(t_n, y_n))\Big),$$

où

$$h = \frac{T}{N} \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N,\ t_n = nh.$$

1. Vérifier qu'il s'agit d'une méthode à un pas de type explicite et déduire que cette méthode est bien définie.
2. Determiner des conditions sur les nombres α, β, γ et h pour que cette méthode soit convergente.

   Indication. On pourra déterminer, d'une part, les conditions sur α, β et γ pour que cette méthode soit consistante, et d'autre part, celles pour qu'elle soit stable.
3. Sous quelles conditions sur α, β et γ, cette méthode est-elle d'ordre supérieur ou égal à 2 ? Cette méthode peut-elle être d'ordre supérieur ou égal à 3 ?

Bon travail ! **Les mathématiques, vues correctement, possèdent non seulement la vérité mais aussi la suprême beauté.** Bertrand Russell.