Sorbonne Université **Analyse numérique (LU3MA232)**
Licence de mathématiques 2025–2026

Interrogation du 14 Octobre 2025

Durée : 45 minutes

Question de cours: Rappeler la formule du schéma du point milieu explicite.

Exercice : Équation de transport avec amortissement

On cherche les solutions $u : \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$ du système (1):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + V\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = -\lambda u(t,x) & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1], \\ u(t,0) = g(t) & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0,x) = \gamma(x) & \text{pour } x \in [0,1], \end{cases} \tag{1}$$

où V et λ sont des réels positifs et les fonctions $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient $g(0) = \gamma(0) = 0$ et $g'(0) = \gamma'(0) = 0$.

1. *Dans les questions 1.a) et 1.b), on suppose* $V = 0$.

   a) Soit $u : \mathbb{R}_+ \times [0,1]$ une fonction de classe C^1. Montrer que u est solution de (1) si et seulement si pour tout $x \in [0,1]$ la fonction $t \mapsto u(t,x)$ est solution d'un certain problème de Cauchy.

   b) En supposant que g est la fonction nulle, donner une solution de (1) et justifier qu'elle est unique.

2. *A partir de maintenant, on suppose* $V > 0$. Dans toute la question 2), on se donne une fonction $u : \mathbb{R}_+ \times [0,1]$ et une paire $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$. On pose :

$$\begin{cases} \sigma : & \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2 \\ & s \mapsto (s,\, x + V(s-t)). \end{cases}$$

   a) Calculer la dérivée de σ (il s'agit d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}^2$).

   b) Montrer qu'il existe un intervalle $I = [s_0, s_1]$ qui dépend de t et de x, tel que:

      - $\forall s \in I,\ \ \sigma(s) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$,
      - $\sigma(s_0) \in \big(\mathbb{R}_+ \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times [0,1]\big)$,
      - $\sigma(s_1) = (t,x)$.

      Indication. On distinguera les cas où $x \geq Vt$ et $x < Vt$.

   c) Montrer que la fonction $u \circ \sigma_{|I}$ (où $\sigma_{|I} : I \to \mathbb{R}_+ \times [0,1]$ désigne la restriction de σ à I) est solution d'un problème de Cauchy de la forme :

$$\begin{cases} y'(s) = f(s,y) & \text{pour } s \in I, \\ y(s_0) = y_0 \end{cases}$$

      en exhibant la fonction $f : I \times [0,1] \to \mathbb{R}$ et la donnée initiale $y_0 := y(s_0) \in [0,1]$.

   d) Montrer que le système (1) admet une unique solution u et donner une expression de u à l'aide des fonctions g et γ.

      Indication. L'expression de $u(t,x)$ est différente selon que $x \geq Vt$ ou $x < Vt$.

3. Soit $T > 0$. On discrétise le domaine $[0,T] \times [0,1]$ à l'aide d'un pas de temps $h_t = \frac{T}{N_t}$ et d'un pas d'espace $h_x = \frac{1}{N_x}$, avec $N_t \in \mathbb{N}^*$ at $N_x \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire que l'on définit pour tout $0 \leq n \leq N_t$, $t^n = nh_t$, et pour tout $0 \leq j \leq N_x$, $x_j = jh_x$.

   On construit une famille de réels $\left(u_j^n\right)_{\substack{0\leq j\leq N_x \\ 0\leq n\leq N_t}}$ par récurrence sur n, avec l'initialisation suivante:

$$\begin{cases} u_0^n = g(t^n), & \text{pour } 0 \leq n \leq N_t, \\ u_j^0 = u_0(x_j), & \text{pour } 0 \leq j \leq N_x \end{cases}$$

   et avec la relation de récurrence suivante (en supposant que $u_1^n, ..., u_{N_x}^n$ sont déjà calculés, celle-ci permet de calculer les termes $u_1^{n+1}, ..., u_{N_x}^{n+1}$):

$$\forall j \in [1, N_x], \qquad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{h_t} + V\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h_x} + \lambda\, u_j^n = 0$$

   a) Écrire ce schéma sous forme d'un schéma explicite à un pas permettant de définir une suite de vecteurs (u^n), chacun appartenant à $\mathbb{R}^{N_x+1}$:

$$u^{n+1} = u^n + h_t\, F_{h_x}(t^n, u^n),$$

   où la fonction $F_{h_x} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N_x+1} \to \mathbb{R}^{N_x+1}$ dépend de la valeur de h_x.

   *Indication.*On pourra écrire F_{h_x} sous la forme $F_{h_x}(t,y) = P_{h_x}y + W$, où $P_{h_x} \in \mathcal{M}_{N_x+1}(\mathbb{R})$ est une matrice carrée dépendant de h_x, et $W \in \mathbb{R}^n$ un vecteur dépendant des conditions initiales.

   b) Soit $0 \leq n \leq N_t$ et $0 \leq j \leq N_x$. On définit l'erreur de discrétisation :

$$\epsilon_j^n = u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j) + V\frac{h_t}{h_x}\big(u(t^n, x_j) - u(t^n, x_{j-1})\big) + \lambda h_t\, u(t^n, x_j).$$

   Montrer qu'il existe deux fonctions $C_1, C_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bornées au voisinage de 0 telles que :

$$|\epsilon_j^n| \leq C_1(h_t^2)h_t^2 + C_1(h_t h_x)h_t h_x,$$

   Remarque: cela peut s'écrire: $|\epsilon_j^n| = O(h_t^2) + O(h_t h_x)$.

   Indication. Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.

   c) Montrer que l'erreur $e_j^n = u(t^n, x_j) - u_j^n$ vérifie:

$$e_j^{n+1} = \Big(1 - V\frac{h_t}{h_x} - \lambda h_t\Big)e_j^n + V\frac{h_t}{h_x}e_{j-1}^n + \epsilon_j^n$$

   d) On suppose que $V\frac{h_t}{h_x} + \lambda h_t \leq 1$. Montrer que:

$$\max_{j,n} |e_j^n| = O(h_t) + O(h_x).$$

Bonus. On définit un nouveau schéma en reprenant la construction précédente, mais en posant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{Vh_t}{2h_x}(u_j^n - u_{j-1}^n) - \lambda h_t\, u_j^n.$$

Montrer que $\epsilon_j^n = O(h_t h_x) + O(h_t h_x^2)$, et que pourtant le schéma n'est pas convergent (c'est à dire que l'erreur ne tend pas toujours vers 0 quand $h_t \to 0$ et $h_x \to 0$).