Université Paris 1 Panthéon–Sorbonne **Ecole d'Economie de la Sorbonne**

Licence 3 **Parcours Economie, Probabilités et Statistiques**

Enseignant : Emmanuel G.

Année académique 2025–2026

Contrôle continu du 16 Decembre 2025

Durée : 45 minutes **Calculatrice non autorisée**

Consignes: On cherche ici à s'assurer que le cours est compris. Il faut donc impérativement justifier vos résultats par une démonstration à partir des éléments dont vous disposez (énoncé, définitions, propriétés, raisonnements et calculs explicites) : **Barème indicatif:** 20 points.

Question de cours (5 points) — 10 min.

1. Rappeler la définition de la convergence en probabilité d'une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires vers une constante μ. C'est quoi un estimateur convergent ?
2. Rappeler l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev.
3. **Applications:**
   (a) Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance μ et de variance σ^2. Déduire que :
   $$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \geq 0.75.$$
   (b) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires identiquement distribuées, de moyenne μ et de variance $\sigma^2 < +\infty$. On suppose que la covariance entre deux variables quelconques est constante egale à $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \rho\,\sigma^2, \quad i \neq j$. Déterminez n pour que
   $$\mathbb{P}\Big(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon\Big) \leq \delta, \quad \text{où} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \delta \in (0,1).$$
   Indication. On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev à la variable aleatoire $\bar{X}_n$ pour montrer que $n_{\min} = \frac{1-\rho}{\frac{\varepsilon^2\,\delta}{\sigma^2} - \rho}$.

Exercice 1 (10 points) — Estimation de la moyenne et de la variance — 20 min.
Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2 inconnues. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.

1. Rappeler l'estimateur de la moyenne $\bar{X}_n$. Montrer qu'il est sans biais, convergent et donner son erreur quadratique moyenne.
2. On souhaite maintenant estimer σ^2. On propose l'estimateur suivant :
   $$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}_n^2,$$
   Expliquer ce choix et ensuite, montrer que
   $$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - (\bar{X}_n - \mu)^2.$$

3. Calculer $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2]$. L'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$ est-il sans biais ?

4. En déduire un estimateur sans biais de σ^2 noté S_n^2 en fonction de $\hat{\sigma}_n^2$.

5. Dans cette question uniquement, on suppose que $X_1, \ldots, X_n$ suivent une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Calculer l'erreur quadratique moyenne de S_n^2, puis celui de $\hat{\sigma}_n^2$.

   Indication. On pourra noter que $\mathrm{Var}(S_n^2) = \frac{2\sigma^2}{n-1}$ et utiliser la décomposition bias-variance.

   Quel estimateur est le meilleur ?

6. Ces estimateurs sont-ils convergents ?

   Indication. On peut utiliser l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev à la variable aleatoire S_n^2.

   Quelle est la distribution de $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma}$ et celle de $n\frac{\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2}$.

7. À partir d'un échantillon aléatoire de $n = 10$ observations tirées d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on obtient les statistiques observées suivantes :

   - $\bar{x}_{10} = 5$,
   - $s_{10}^2 = \dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x}_{10})^2 = 4$.

   (a) Par le theoreme de Fisher, donner une statistique pivotale et sa distribution pour l'estimation de μ. On donne $t_{(0.975,9)=2.262}$.

   (b) Construire un intervalle de confiance à 95 % pour μ.

   (c) On suppose que l'on souhaite que la longueur de cet intervalle soit inférieure à 3.57. Quel est le niveau de confiance associé ? On donne $t_{(0.99,9)=2.282}$.

Exercice 2 (6 points) – Loi géométrique — 15 min. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{P}[X = k] = (1-p)^{k-1}p.$$

1. calculer l'espérance et la variance de X i.e. verifier que $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}ar[X] = \frac{1-p}{p^2}$.

2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Par la méthode des moments, donner un estimateur $\hat{p}_n$ de p.

3. Cet estimateur est-il biasé ?

   Indication. On pourra utiliser utiliser l'inégalité de Jensen qu'on prendra le soin de rappeler.

4. Montrer que la log-vraisemblance associée à l'échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ s'écrit

$$\ell_n(p; x_1, \ldots, x_n) = \ln(1-p)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right) + n\ln(p).$$

5. Donner l'estimateur $\hat{p}_n^{\mathrm{MV}}$ du maximum de vraisemblance de p. S'agit-il de son unique maximum? Que peut-on conclure sur la convergence de ces deux estimateurs ? Justifier!

Bon travail ! **« La beauté des mathématiques n'est pas seulement dans les solutions, mais dans la manière dont elles nous dévoilent des vérités cachées.»** — Roger Penrose