Université Paris 1 Panthéon–Sorbonne **Ecole d'Economie de la Sorbonne**

Licence 3 **Parcours Economie, Probabilités et Statistiques**

Enseignant : Emmanuel G.

Année académique 2025–2026

Contrôle continu du 18 Novembre 2025

Durée : 45 minutes **Calculatrice non autorisée**

Consignes: On cherche ici à s'assurer que le cours est compris. Il faut donc impérativement justifier vos résultats par une démonstration à partir des éléments dont vous disposez (énoncé, définitions, propriétés, raisonnements et calculs explicites) : **Barème indicatif:** 20 points.

Question de cours (2 points) — 2 min.

1. Soit (X, Y) une paire de variables aléatoires de densité jointe $f_{X,Y}$, donner la condition necessaire et suffisante pour que les variables X et Y soient indépendantes.

2. Donner la formule de la variance de $X + Y$.

Exercice 1 (7 points) — Loi de Pareto et inégalités de richesse — 12 min.

Dans les modèles macroéconomiques d'inégalités, on modélise la richesse W par une loi de Pareto, où $w_m > 0$ est le seuil minimal et $\alpha > 0$ un paramètre d'inégalité. On considère que la densité de W est donnée par

$$f_W(w) = \begin{cases} c\, w^{-(\alpha+1)}, & w \geq w_m, \\ 0, & w < w_m, \end{cases} \quad \text{où } c > 0 \text{ est une constante à déterminer.}$$

1. Rappeler les deux conditions nécessaires pour qu'une fonction soit une densité de probabilité. Déterminer c en fonction de α et w_m afin que f_W soit bien une densité.

2. On suppose $c = \alpha\, w_m^{\alpha}$: calculer la fonction de répartition $F_W(w)$ pour tout $w \in \mathbb{R}$.

3. Calculer $\mathbb{P}(W \geq 2w_m)$, $\mathbb{P}(W < 3w_m)$ et $\mathbb{P}(1.5w_m < W < 4w_m)$ en fonction de α.

4. Justifiez que la fonction quantile $Q(q)$, s'écrit: $Q(q) = w_m\,(1 - q)^{-1/\alpha}, \quad 0 < q < 1$

5. Médiane et troisième quartile : utiliser la fonction quantile pour calculer la médiane et le troisième quartile de W.

6. Interprétation économique : discuter l'impact de α sur la concentration des richesses. Que se passe-t-il lorsque α augmente ou diminue ?

Exercice 2 (4 points) – Loi normale, et Theoreme Central Limite (TCL) — 8 min.

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, On veut montrer que $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. **(0,5 pt)** Rapeller l'expression de la moyenne empirique $\overline{X}_n$ de l'échantillon.

2. Calculer $\mathbb{E}[\overline{X}_n]$ et $\mathrm{Var}(\overline{X}_n)$.

3. En déduire la loi de $\overline{X}_n$, puis le théorème central limite dans le cas gaussien. Est-il exact au sens égalité en loi ?

4. En notant Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, le quantile d'ordre α de $\overline{X}_n$, note $q_\alpha(\overline{X}_n)$ est -t'il egal à $\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(\alpha)$? Justifiez !

Exercice 3 (4 points) — Contrôle de précision sur la moyenne − 10 min.

On observe un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. provenant d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec variance connue $\sigma^2 = 9$. On souhaite déterminer la plus petite valeur entière de n telle que

$$\Pr\Big(|\overline{X}_n - \mu| < 0{,}05\Big) \geq 0{,}95.$$

1. Exprimer $\Pr\left(|\overline{X}_n - \mu| < 0{,}05\right)$ en fonction de Φ, fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On pourra utiliser l'inegalité de symetrie $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
2. En déduire une condition explicite sur n.
3. Calculez la plus petite valeur entière de n qui satisfait cette condition. $q_{0.975} = 1.96$

Exercice 4 (4 points) — Comparaison de moyennes normales − 10 min

Dans un concours d'entrée, les notes des candidats provenant de deux écoles sont distribuées comme suit : $X_i \sim \mathcal{N}(680, 144)$ (pour l' École C) et $Y_j \sim \mathcal{N}(650, 196)$ (pour l'École D).

Les variables sont indépendantes entre candidats et entre écoles. On tire au hasard **3 candidats de l'école C** et **4 candidats de l'école D**. On note leurs moyennes respectives :

$$\overline{X}_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}, \qquad \overline{Y}_4 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{4}.$$

On s'intéresse à la probabilité que la moyenne des candidats de C soit supérieure à celle des candidats de D, c'est-à-dire $\mathbb{P}(\overline{X}_3 > \overline{Y}_4)$.

1. Déterminer la loi exacte de $\overline{X}_3$ (moyenne de l'école C) et de $\overline{Y}_4$ (moyenne de l'école D).

   Indication. On pourra remarquer que d'après l'Exercice 2, question 3, $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.
2. En déduire en justifiant la loi de la différence $Z = \overline{X}_3 - \overline{Y}_4$.
3. Calculer explicitement la probabilité $\mathbb{P}(\overline{X}_3 > \overline{Y}_4)$ en fonction de la fonction de répartition Φ de la loi normale. Deduire une approximation numerique (arrondi à 4 décimales).

Bon travail ! **« Les mathématiques, vues correctement, possèdent non seulement la vérité mais aussi la suprême beauté. »** Bertrand Russell.