
Contrôle Continu II

UL1MA003 2026

90min

Tous les appareils électroniques sont strictement interdits, y compris les smartphones, les montres connectées et les écouteurs. Le non-respect de cette règle entraînera l'élimination immédiate de l'épreuve. Toutes les réponses doivent être justifiées. Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

Exercice 1. Considérons l'ensemble $S \subset \mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$S = \{ P_1(X) = 1+X-X^3, P_2(X) = 1-X^2-X^3, P_3(X) = 1+2X+X^2-X^3, P_4(X) = 1+X+X^3 \}.$$

1. Montrer que $P_3(X)$ est une combinaison linéaire de P_1 , P_2 et P_4
2. Construire, en justifiant, une base de $\text{Vect}(S)$ (l'espace vectoriel engendré par les éléments de S) formée d'éléments de S , et indiquer la dimension de $\text{Vect}(S)$.
3. Montrer que

$$W = \{ p \in \text{Vect}(S) \mid p(0) = p'(0) \}$$

forme un sous-espace de $\text{Vect}(S)$, déterminer en justifiant sa dimension, et en donner une base.

4. Déterminer les coordonnées de $q(X) = 1 + X - \pi^2 X^3$ dans la base trouvée dans l'exercice 1.2

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . On considère les ensembles

$$F = \left\{ P \in E \mid \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{ P \in E \mid P' = 0 \}.$$

1. Justifier que $G = \mathbb{R}_0[X]$. En déduire que G est de dimension 1.
2. Montrer que l'application

$$\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad P \mapsto \varphi(P) := \int_0^1 P(t) dt$$

est \mathbb{R} -linéaire.

3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
4. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Déterminer une constante réelle a_k telle que $X^k - a_k \in F$. Cette constante est-elle unique ?
5. Montrer que la famille de polynômes $(X^k - a_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ est libre.
6. Utiliser φ et le théorème du rang pour calculer la dimension de F .
7. En déduire une base de F .
8. Montrer que $F \oplus G = E$.

Exercice 3. Soit $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \geq 2$ un entier. On définit une somme de Riemann

$$S_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
2. Trouver une fonction continue $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \ln k - \ln n.$$

3. Evaluer

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx.$$

4. Montrer que, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \ln(k) = n \ln(n) + (2 \ln 2 - 1)n + o(n).$$