

Contrôle Continu I
UL1MA003 2026
90min

Tous les appareils électroniques sont strictement interdits, y compris les smartphones, les montres connectées et les écouteurs. Le non-respect de cette règle entraînera l'élimination immédiate de l'épreuve. Toutes les réponses doivent être justifiées. Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

Exercice 1. (*Question de cours*) Démontrer le théorème des bornes atteintes : une fonction continue f sur un segment $[a, b]$ atteint une valeur maximale M et une valeur minimale m .

Exercice 2. Calculer, si elles existent dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)^5 + (2n+1)^7}{(n+3)^4(n+4)^3}$;
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{e}$;
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2})^n}$;
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par récurrence

$$u_1 = e^e, \quad u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{3}.$$

- 1. Montrer par récurrence que $u_n > 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
- 3. Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sin(\pi \sin(x))$.

- 1. Montrer que l'équation $f(x) = \sin(x)$ admet une unique solution sur l'intervalle $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$.
- 2. Montrer que f est périodique de période 2π .
- 3. Montrer que f admet un minimum et un maximum.
- 4. Montrer que pour tout n , la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n admet un maximum et un minimum.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $c \in \mathbb{R}$. Existe-t-il nécessairement $a, b \in \mathbb{R}$, avec $c \in]a, b[$, tels que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$? Justifier ou donner un contre-exemple.

Exercice 6. Soit (x_n) une suite bornée et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue tel que $f(x_n) = x_n + \frac{1}{n}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$.

- 1. Montrer que l'intervalle $[1, +\infty)$ est stable par f .
- 2. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 3. En déduire l'égalité

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$